



RISIKO MANAGER

08 . 2015

[KREDITRISIKO] [MARKTRISIKO] [LIQUIDITÄTSRISIKO] [OPRISK] [ERM] [REGULIERUNG]



Inhalt

- 1, 7 Expected Shortfall: Elicitability und Backtesting
- 3 Standpunkt, Kurz & Bündig
- 12 Basel III fördert Deleveraging
- 15 Buchbesprechung
- 16 Poolratings – deutsches Erfolgsmodell für Europa?
- 18 Personalien
- 19 Impressum
- 19 Produkte & Unternehmen

WWW.RISIKO-MANAGER.COM

Risikomaße

Expected Shortfall: Elicitability und Backtesting

Mit dem Fundamental Review of the Trading Book wird in absehbarer Zeit der Value at Risk als führendes Marktrisikomaß durch den Expected Shortfall ersetzt. Der vorliegende Beitrag stellt die aktuelle, kontroverse Diskussion um die Möglichkeiten statistischer Rückvergleiche (Backtesting) für den Expected Shortfall dar. Es wird einerseits die Rolle der Elizitierbarkeit (engl. elicibility) kritisch hinterfragt, andererseits werden verschiedene, aktuelle Verfahrensvorschläge analysiert und weiterentwickelt.

Einleitung

Der Expected Shortfall ES_α ist der Erwartungswert einer Risikoposition (P&L-Verteilung) L jenseits eines bestimmten Quantils bzw. Value at Risks $VaR_\alpha(L)$, ► **Gleichung 01**.

Trotz dieser gegenüber dem Value at Risk für die Abschätzung zu erwartender Verluste vorteilhaften Definition spielte der

Definition ► **Gleichung 01**
des Expected Shortfall

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du.$$

Expected Shortfall im Marktrisikokontrolling bis dato nur eine untergeordnete Rolle. Dies ist nicht zuletzt auf die Festlegung

Fortsetzung auf Seite 7

Anzeige

 msgGillardon

Menschen beraten, *Ideen realisieren.*

Zukunftsweisendes Know-how für Ihr Risikomanagement

Seminare zu MaRisk

- Vertriebsrisiko als wesentliches Risiko nach MaRisk am 01. Juli 2015 in Würzburg
- Brennpunkt MaRisk vom 09. bis 10. Juli 2015 in Würzburg
- Kreditrisiko für Revisoren am 16. Juli 2015 in Würzburg

www.msg-gillardon.de/seminare



Fortsetzung von Seite 1

der Aufsicht auf den Value at Risk als maßgebliche Kenngröße zurückzuführen.

Mit der Veröffentlichung einer Reihe von Konsultationspapieren durch den Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS 2012, 2013, 2014, 2015), die das erklärte Ziel einer grundlegenden Revision der regulatorischen Anforderungen an das Handelsbuch haben, zeichnet sich der Austausch des Value at Risk durch den Expected Shortfall als führendes Marktrisikomaß ab. Konsequenterweise sind sowohl die theoretischen als auch die praktischen Aspekte des Expected Shortfall zunehmend in den Fokus der Diskussion gerückt [bspw. auch in dieser Zeitschrift, Keese/Quell 2012, Baule/Tallau 2012, Ziggel/Berens 2014].

Neben der eigentlichen Bestimmung des Marktrisikomaßes, auf der das Hauptaugenmerk der vorstehend zitierten Artikel lag, stellt dessen Validierung einen Schwerpunkt der Tätigkeit des Marktrisikokontrollings dar. Hierbei haben sich statistische Rückvergleiche des vorausgesagten Risikos mit der tatsächlich realisierten P&L [sog. Backtesting, vgl. Jorion 2003, S. 679 f.] als wesentlicher Baustein etabliert. Auch jenseits konkreter aufsichtsrechtlicher Anforderungen spielt das Backtesting eine wesentliche Rolle bei der Analyse der Risikokennzahlen, was sich beispielsweise auch an zum Teil umfangreichen Backtesting-Prozessen in Banken ohne regulatorisch zur Eigenmittelunterlegung zugelassenes Marktrisikomodell zeigt. Insbesondere die Betrachtung der Validierungsergebnisse auf untergeordneten Portfolioebenen kann nützliche Informationen zum Modell und den verwendeten Eingangsdaten liefern. Daher sind analoge, praxistaugliche Verfahren für ein Backtesting des Expected Shortfall von besonderem Interesse.

Elicibility – das Backtesting-Axiom?

Der wissenschaftliche Diskurs über die Eignung oder Vorteilhaftigkeit bestimmter Risikomaße entwickelt sich häufig entlang von bestimmten als wünschenswert identifizierten Eigenschaften, die in Axiomen formalisiert werden [vgl. einfürend McNeil/Frey/Embrechts 2005, S.238 ff.]. Beispielsweise definieren die Axiome der Positivität, Homogenität, Translationsinvarianz und Subadditivität die bekannte Klas-

Scoring-Funktion der Quantilsfunktion (x: Beobachtung; y: Voraussage)

► Gleichung 02

$$s(x_t, y_t) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max(y_t - x_t, 0) + \max(x_t - y_t, 0)$$

Regression mit Scoring-Funktion

► Gleichung 03

$$\rho(L) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \{ \mathbb{E}_P s(x, L) \} \approx \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T s(x, l_i) \right\}$$

se der kohärenten Risikomaße [Artzner/Delbaen/Eber/Heath 1999]. Ergänzt um die Axiome der komonotonen Additivität und Verteilungsinvarianz erhält man die Klasse der spektralen Risikomaße [Acerbi 2002], deren bekanntester Vertreter der Expected Shortfall ist [Acerbi 2002, Tasche 2002].

Dieser Axiomenkranz wurde unlängst um die Eigenschaft der Elizitierbarkeit (engl. elicibility) ergänzt. Formal ist ein Risikomaß ρ (hier allgemein definiert als Funktional $\rho: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Menge \mathcal{L} von P&L-Zufallsvariablen L auf fixiertem Wahrscheinlichkeitsraum) genau dann elizitierbar bezüglich der Menge \mathcal{P} der durch \mathcal{L} gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaße P , wenn eine Scoring-Funktion $s: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ existiert, für die für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}_P s(\rho(L), L) \leq \mathbb{E}_P s(x, L),$$

wobei L P -verteilt ist [vereinfacht übernommen aus Gneiting 2011]. Gleichheit impliziert $x = \rho(L)$. Eine solche Scoring-Funktion wird auch als streng konsistent zum Funktional ρ bezüglich der Menge \mathcal{P} bezeichnet. Die Eigenschaft sichert, dass der erwartete Score des korrekten Werts des Funktionals bei Beobachtung der P&L-Variablen L kleiner ist als der erwartete Score jedes anderen Werts.

Es kann nun gezeigt werden, dass der Expected Shortfall nicht elizitierbar ist [vgl. Gneiting 2011]. Allgemeiner gilt sogar, dass kein spektrales Risikomaß außer dem Trivialfall des Erwartungswerts elizitierbar ist [Ziegel 2013, Bellini/Bignozzi 2013]. Demgegenüber ist der Value at Risk elizitierbar. Ist dieses Ergebnis der tieferliegenden Grund für die Schwierigkeit, Backtesting-Verfahren für den Expected Shortfall zu konstruieren? Ist, anders ausgedrückt, die Eigenschaft der Elizitierbarkeit eine Art „Backtesting-Axiom“, dessen Verletzung die Suche nach Backtesting-Verfahren fruchtlos macht?

Diese und ähnliche Fragestellungen wurden in den letzten Jahren kontrovers diskutiert und uneinheitlich beantwortet [vgl. z.B. Carver 2013, 2014, Hull/White 2014]. In diesem Artikel wird die Auffassung vertreten, dass kein Zusammenhang zwischen der fehlenden Elizitierbarkeit des Expected Shortfalls und der schwierigen Konstruktion von Backtesting-Verfahren existiert [vgl. für eine ähnliche Schlussfolgerung bspw. Acerbi/Székely 2014].

Betrachtet man zunächst den Value at Risk, so ist festzustellen, dass er zwar elizitierbar ist, jedoch wird diese Eigenschaft in den üblichen Backtesting-Verfahren nicht ausgenutzt. Vielmehr ist es die Existenz eines Bernoulli-verteilten Ausreißerprozesses, der sowohl dem aufsichtlichen Backtesting als auch den weitergehenden Methoden zugrunde liegt [vgl. z.B. Campbell 2005]. Die Scoring-Funktion für den Value at Risk (► Gleichung 02) oder ein Derivat hieraus werden nicht benötigt und bieten auch keine offensichtlichen Vorteile.

Betrachtet man nun den Expected Shortfall, liegen sowohl fehlende Elizitierbarkeit auf der P&L-Verteilung als auch Schwierigkeiten im Backtesting gemeinsam vor. Jedoch kann hier kein systematischer Zusammenhang existieren, da für den Expected Shortfall lediglich die Flügelverteilung jenseits seines Konfidenzniveaus relevant ist, deren einfacher Mittelwert er ist. Der Mittelwert ist aber elizitierbar [vgl. Gneiting 2011] und mithin auch der Expected Shortfall auf der Flügelverteilung. Die Scoring-Funktion ist die quadratische Abweichung $s(x_i, y_i) = (x_i - y_i)^2$ zwischen Beobachtung x_i und Voraussage y_i , die in verallgemeinerter Regression (► Gleichung 03) auf den üblichen empirischen Expected-Shortfall-Schätzer $\bar{ES}_\alpha = \frac{1}{N} \sum_i \tilde{l}_i$ führt, wobei \tilde{l}_i Realisationen der auf den Flügel beschränkten P&L-Verteilung $\tilde{L}(\alpha)$ sind.

Mehrere Backtesting-Verfahren für den Expected Shortfall setzen auf dieser Flügelverteilung auf [vgl. Wong 2008, Righi/Ceretta 2013, Acerbi/Székely 2014]. Insbesondere kann ein solches Verfahren auf Basis der Scoring-Funktion konstruiert werden, indem das Verfahren von Righi/Ceretta [vgl. Righi/Ceretta 2013] auf die Relation aus quadratischer Abweichung und Varianz der Flügelverteilung adaptiert wird. Ebenso kann man Verfahren über einen gegenüber dem Value at Risk verallgemeinerten Ausreißerprozess entwickeln [vgl. Constanzino/Curran 2014]. Beide Herangehensweisen werden im nächsten Abschnitt genauer betrachtet.

Insgesamt ist Elizitierbarkeit also weder ursächlich für die Existenz der üblichen Backtesting-Verfahren des Value at Risk noch für die Schwierigkeiten der Backtesting-Verfahren für den Expected Shortfall.

Backtesting Expected Shortfall – konkrete Verfahrensvorschläge

Ungeachtet der vorhergehenden Diskussion wurde in den letzten Jahren eine Vielzahl verschiedener Verfahren für das Backtesting des Expected Shortfall vorgeschlagen [für eine Übersicht bis 2011, vgl. BCBS 2011, aktueller auch Homescu 2014]. In diesem Abschnitt greifen wir drei dieser Verfahren auf und diskutieren Anwendungen und Weiterentwicklungen. Im Einzelnen handelt es sich hierbei um:

- **Quadraturformeln** [aufgreifend Emmer/Kratz/Tasche 2013], aufgrund ihres Zusammenhangs mit den Vorschlägen des Baseler Ausschusses [BCBS 2013, S. 27],
- **Ausreißerprozesse** [folgend Acerbi/Scéleky 2014, Constanzino/Curran 2014], aufgrund ihrer Nähe zum klassischen Backtesting des Value at Risk,
- **Streumaße auf der Flügelverteilung** [folgend Righi/Ceretta 2013], aufgrund ihrer formalen Nähe zur Scoring-Funktion des vorhergehenden Abschnitts.

Für einige illustrative Rechnungen nutzen wir im Folgenden ein aus Gründen der Klarheit der Darstellung gegenüber einer realistischen Geschäftssituation vereinfachtes Anleiheportfolio. Das betrachtete Portfolio setzt sich aus fünfjährigen Anleihen mit Nondefault Ratings auf einer achtstufigen Ratingskala zusammen, deren Laufzeiten alle per 1. Januar 2008 beginnen und per 31. Dezember 2013 enden. Effektiv kann das Portfolio damit durch

Annäherung des Expected Shortfall durch Summenbildung

► Gleichung 04

$$ES_{\alpha}(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(L) du = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^N (\beta_{i+1} - \beta_i) VaR_{\beta_i}(L) \quad \text{mit } \beta_{N+1} = 1$$

Anwendung Gauß-Integration

► Gleichung 05

$$ES_{\alpha}(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(L) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 VaR_{\frac{1-\alpha}{2}\tilde{u} + \frac{1+\alpha}{2}}(L) d\tilde{u} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i f\left(\frac{1-\alpha}{2}\tilde{u}_i + \frac{1+\alpha}{2}\right)$$

eine einzige Anleihe beschrieben werden, dessen effektiver Kupon bei 4,97 Prozent liegt. Die für ein realistisches Portfolio wesentliche Creditspread-Dynamik wird unterdrückt, weil es im Weiteren nur um das Studium des grundsätzlichen Verhaltens der verschiedenen Backtesting-Verfahren gehen soll. Deshalb wird nur eine begrenzte Zahl von Risikofaktoren simuliert, und die Dynamik des Portfolios beschränkt sich auf die Barwertveränderungen aufgrund der Veränderung in den Zinssätzen. Es wird eine historische Simulation dieser Zinsdynamik durchgeführt, wobei bzgl. jedes Berechnungsstichtags jeweils die letzten 250 historischen Szenarien verwendet werden. Es wird ein Eintages-Risiko berechnet, das mit täglichen P&L-Veränderungen (Clean) verglichen wird.

Quadraturformeln

Aus der Definition des Expected Shortfalls als Integral ist unmittelbar einleuchtend, dass eine Annäherung als gewichtete Summe einzelner Quantile $VaR_{\beta_i}(L)$ möglich ist (► Gleichung 04). Diese Art der Näherung unterliegt den von [Emmer/Kratz/Tasche 2013] bzw. dem Baseler Ausschuss [BCBS 2013, S. 27] vorgeschlagenen Backtesting-Methoden. Auf vorgegebenem Raster $\{\beta_i\}_{i=1\dots N}$ aus vier Punkten $\{\alpha, 0.75\alpha + 0.25, 0.5\alpha + 0.5, 0.25\alpha + 0.75\}$ bzw. zwei Punkten $\{\alpha = 97,5 \text{ Prozent}; 99 \text{ Prozent}\}$ sollen die bekannten Value at Risk-Backtesting-Methoden für jede Stützstelle einzeln angewandt werden. Implizit kann hierdurch getestet werden, ob die bedingten Wahrscheinlichkeiten $(\beta_{i+1} - \beta_i) / (1 - \alpha)$ der Partitionen korrekt vorausgesagt werden.

Ein solches Backtesting ist desto valider, je besser die getesteten Stützstellen den Expected Shortfall annähern. Wir schlagen daher eine Systematisierung der Approxi-

mation über die Methode der Gauß-Integration vor [vgl. z.B. Schwarz/Köckler 2004, S. 320 ff.] (► Gleichung 05).

Die Stützstellen \tilde{u}_i werden im Folgenden als Nullstellen von entsprechenden Legendre-Polynomen gewählt (Gauß-Legendre-Integration), die Gewichte w_i ergeben sich hieraus. Die Nullstellen können in entsprechende Quantil-Stützstellen umgerechnet werden. Beispielsweise ergeben sich für die Zwei-Punkt-Näherung des Baseler Ausschusses die beiden Stützstellen $\{\alpha_G = 98,03 \text{ Prozent}; 99,47 \text{ Prozent}\} \approx \{98 \text{ Prozent}; 99,5 \text{ Prozent}\}$. Sollte eine höhere Genauigkeit benötigt werden, empfiehlt sich die Nutzung eingebetteter Integrationsregeln, beispielsweise der Gauß-Kronrod-Quadratur [vgl. z.B. Schwarz/Köckler 2004, S. 328 f.]. Hierdurch wird eine optimale Verfeinerung des Gitters unter Beibehaltung der alten Stützstellen erreicht. Für die diskutierte Zwei-Punkt-Näherung führt die Gauß-Kronrod-Erweiterung auf die Fünf-Punkt-Näherung $\{\alpha_{GK} \approx 97,6 \text{ Prozent}; 98 \text{ Prozent}; 98,75 \text{ Prozent}; 99,5 \text{ Prozent}; 99,9 \text{ Prozent}\}$. Die höhere Genauigkeit verlangt in der Regel nach der Schätzung höherer Quantile, was im Hinblick auf die verfügbare Datenqualität stets gegen die theoretische Verbesserung abzuwägen ist.

Die Zusammenhänge werden in ► Abb. 01 anhand der historischen Simulation für das Anleiheportfolio exemplifiziert. Aufgetragen ist die relative Abweichung des Expected Shortfalls aus den unterschiedlichen Quadraturformeln zu der empirischen Schätzung. Bezogen auf die Zwei-Punkt-Näherung (Stützstellen nach Gauß-Quadratur mit Legendre-Polynomen bzw. Baseler Ausschuss) ist erwartungsgemäß festzustellen, dass die Zwei-Punkt-Gauß-Näherung stets eine bessere Approximation liefert. Auffällig ist die Höhe der Verbesserung von bis zu 17 Prozentpunkten, insbesondere im normalen Markt des Jahresanfangs 2008.

Ausreißerprozess für spektrale Risikomaße

► Gleichung 06

$$BT_{\varphi}(N) = \sum_{t=1}^N BT_{\varphi}^{(t)} \quad \text{mit} \quad BT_{\varphi}^{(t)} = \int_0^1 dp \varphi(p) \mathbb{I}(L_t \geq VaR_p(L_t))$$

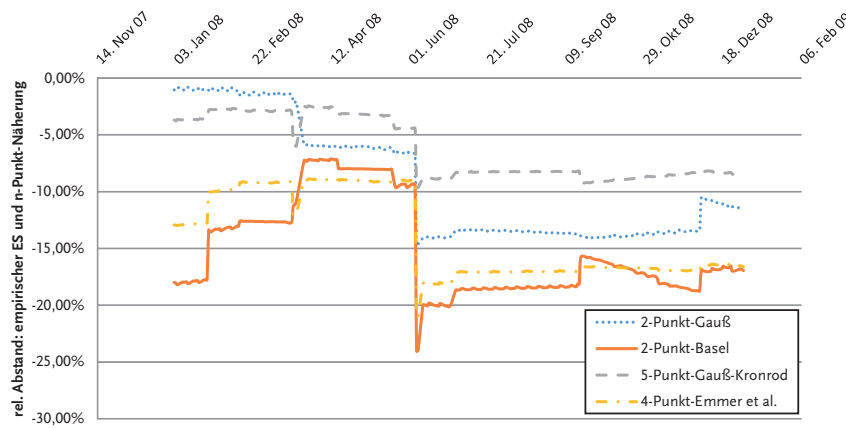
Ausreißerprozess für den Expected Shortfall

► Gleichung 07

$$BT_{ES}^{(t)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & F_L(L_t) < \alpha \\ \frac{1 - F_L(L_t)}{1 - \alpha} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad BT_{ES}(\alpha, N) = \sum_{t=1}^N \mathbb{I}(L_t \geq VaR_{\alpha}(L_t)) \frac{1 - F_L(L_t)}{1 - \alpha}$$

Güte der Approximationen

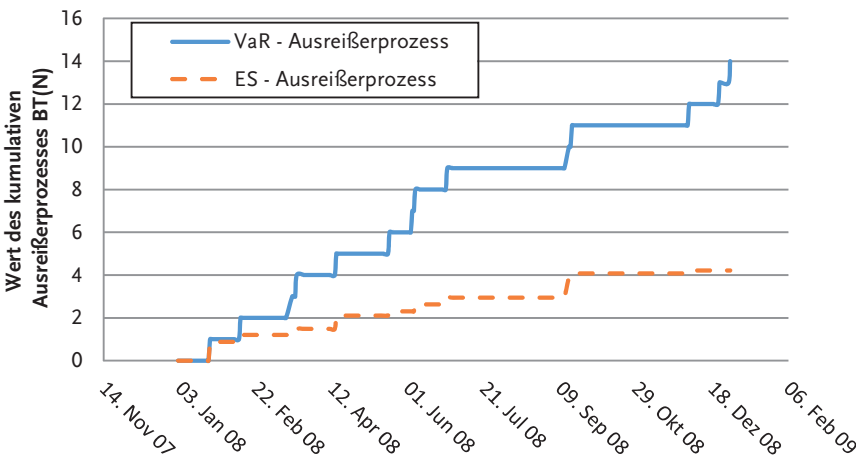
► Abb. 01



Abbildungsgüte der Approximation des Expected Shortfalls durch Quadraturformeln gemessen in der Simulation des Anleiheportfolios anhand des relativen Abstands zum empirischen Expected Shortfall. Sprunghafte Strukturen sind auf die Methode der historischen Simulation zurückzuführen.

Kumulierte Ausreißerprozesse $BT(N)$ für Value at Risk (VaR) und Expected Shortfall (ES) für das Anleiheportfolio zwischen 2. Januar 2008 und 31. Dezember 2008.

► Abb. 02



Bezogen auf die Vier-Punkt-Näherungen fällt auf, dass die Rechnung mit Stützstellen nach Emmer et al. in der Regel keine deutliche Verbesserung gegenüber der Zwei-Punkt-Näherung des Baseler Ausschusses liefert, vielmehr sogar stets unter der Qualität der Zwei-Punkt-Näherung nach Gauß verbleibt. Die Gauß-Kronrod-Näherung hingegen verbessert wie erwartet stets die Integration gegenüber der Zwei-Punkt-Näherung. Die scheinbare Verschlechterung der Fünf-Punkt- gegenüber der Zwei-Punkt-Näherung im ersten Quartal 2008 ist auf die Nutzung des empirischen Expected Shortfalls als Benchmark, kombiniert mit der historischen Simulation, zurückzuführen. Es überlagern sich die Bewegungen der Benchmark und der Quadraturformeln bei hinzukommenden extremen Szenarien in der historischen Simulation.

Abschließend sei nochmals auf den exemplarischen Charakter der Analyse des Anleiheportfolios hingewiesen. Die aufgezeigten Zusammenhänge können jedoch als valider Ausgangspunkt für eine tiefergehende Analyse dienen.

Ausreißerprozesse

Das klassische Backtesting des Value at Risk beruht auf dem Zählen von Ausreißern, präziser auf einer Zufallsvariablen der Form $BT_{VaR}(\alpha, N) = \sum_{t=1}^N BT_{VaR}^{(t)}(\alpha) = \sum_{t=1}^N \mathbb{I}(L_t \geq VaR_{\alpha}(L_t))$ [vgl. z. B. Campbell 2005]. Die Variable ist unter bestimmten Voraussetzungen binomial- bzw. näherungsweise normalverteilt und ist Grundlage des Baseler Ampelsystems [BCBS 1996]. Constanzino/Curran [Constanzino/Curran 2014] verallgemeinern diesen Prozess auf allgemeine spektrale Risikomaße mit Risikospektrum $\varphi(p)$ (► Gleichung 06) und zeigen, dass die Variable $BT_{\varphi}(N)$ unter bestimmten Voraussetzungen ebenfalls asymptotisch normalverteilt ist.

Die Statistik enthält den Spezialfall des Value at Risk über das entartete Risikospektrum $\varphi(p) = \delta(p - \alpha)$. Für den Expected Shortfall mit seinem Risikospektrum $\varphi(p) = \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{I}(p \geq \alpha)$ ergibt sich ebenfalls eine sehr einfache Formel (► Gleichung 07, $F_L(L_t)$ ist die kumulative Verteilungsfunktion der P&L-Variablen L_t). Die Statistik $BT_{ES}^{(t)}(\alpha)$ ist gleichverteilt auf dem Flügel und verschwindet abseits davon. Ihr Erwartungswert ist $\frac{1 - \alpha}{2}$, die Varianz $\frac{1 - \alpha}{12} (3\alpha + 1)$.

Die Statistik $BT_{ES}(\alpha, N)$ kann unter der Hypothese, dass L_t tatsächlich F_L -verteilt

ist, einfach simuliert werden, da $F_L(L_t)$ dann gleichverteilt ist. Die asymptotische Normalverteilungseigenschaft wird für die Bestimmung entsprechender p-Werte daher nicht benötigt. Für die Schwellen der Baseler Ampel einer 99 Prozent- bzw. 95 Prozent-Aufttrittswahrscheinlichkeit ergeben sich für $\alpha=97,5$ Prozent und $N=250$ die Werte 9,7 bzw. 5,7. Für den Value at Risk ergeben sich zum Vergleich die Werte 17 und elf.

Das Zusammenspiel dieser Statistiken kann anhand der historischen Simulation für das Anleiheportfolio verdeutlicht werden. In **► Abb. 02** sind der Value-at-Risk-Ausreißerprozess $BT_{VaR}(\alpha=97,5 \text{ Prozent}; N)$ und $BT_{ES}(\alpha=97,5 \text{ Prozent}; N)$ als Funktion der Anzahl Beobachtungen (beginnend am 2. Januar 2008, endend am 31. Dezember 2008) aufgetragen. Der gedämpfte Anstieg von $BT_{ES}(97,5 \text{ Prozent}; N)$ ist auf die Gewichtung jedes Ausreißers in **► Gleichung 07** zurückzuführen. Am Ende des Beobachtungszeitraums ($N=232$ Beobachtungen) sind $BT_{VaR}(\alpha=97,5 \text{ Prozent}; 232) = 14$ und $BT_{ES}(97,5 \text{ Prozent}; 232) = 4,2$. Die Baseler Ampel wäre für den Value at Risk daher gelb und in analoger Anwendung für den Expected Shortfall grün.

Das strengere Urteil bezüglich des Value at Risk (dem Aufsatzpunkt der Flügelverteilung) wird in der Statistik des Expected Shortfalls also verwässert. Diese Einschätzung wird durch die Beobachtung unterstrichen, dass auf den Konfidenzniveaus der Stützstellen in der Zweipunkt-Gauß-Näherung $BT_{VaR}(\alpha=98 \text{ Prozent}; 232) = 12$ und $BT_{VaR}(\alpha=99,5 \text{ Prozent}; 232) = 7$ gilt. Die Schwellenwerte der Baseler Ampel zugrunde legend, wird die erste Stützstelle als gelb eingeschätzt, die zweite als rot. Etwas verallgemeinert spricht der Befund gegen die Konstruktion einer einzelnen Statistik für den Expected Shortfall insgesamt, da das scharf zu definierende Ausreißerkriterium des Value at Risk stets in irgendeiner Weise gewichtet und damit verwässert werden muss.

Diesem Umstand kann einerseits durch ein gestaffeltes Backtesting auf den Quadraturformeln, wie vorstehend diskutiert, oder durch zweistufige Verfahren, in denen zuerst ein klassischer Value-at-Risk-Test zum Konfidenzniveau α , danach ein Test auf der Flügelverteilung bezüglich des Expected Shortfalls durchgeführt wird, begegnet werden. In der zweiten Variante fällt die Statistik in **► Gleichung 07** auf Vorgehensweisen zurück, die ebenfalls auf

Scoring-Funktion- basierte Statistik für den Expected Shortfall **► Gleichung 08**

$$BT'_t = \frac{(\tilde{l}_t - ES_{\alpha,t})^2}{\mathbb{E}_t(\tilde{l}_t(\alpha) - ES_{\alpha,t})^2}$$

transformierten Beobachtungen beruhen [Kerkhof/Melenberg 2004, Berkowitz 2001, jüngst auch Acerbi/Scékelly 2014].

Streuemaße auf der Flügelverteilung

Der Expected Shortfall ist der Mittelwert der Flügelverteilung $\tilde{l}_t(\alpha)$ in jedem Beobachtungszeitpunkt t . Diese Feststellung aufgreifend, schlagen Righi/Ceretta [Righi/Ceretta 2013, McNeill/Frey/Embrechts 2005, S. 163] vor, den Quotienten aus dem Abstand der realisierten Clean-P&L \tilde{l}_t zu Mittelwert $ES_{\alpha,t}$ und Standardabweichung $\sigma_{\alpha,t}$ der Flügelverteilung zu betrachten, also die Statistik $BT'_t = \frac{l_t - ES_{\alpha,t}}{\sigma_{\alpha,t}}$. Aus dieser Grundidee lässt sich eine Backtesting-Statistik auf Basis der Scoring-Funktion $s(x_t, \gamma_t) = (x_t - \gamma_t)^2$ des Mittelwerts konstruieren.

Der Mittelwert von $\tilde{l}_t(\alpha)$ ist der Expected Shortfall und der Score bei korrektem Schätzer $(\tilde{l}_t(\alpha) - ES_{\alpha,t})^2$. Dessen Erwartungswert $\mathbb{E}_t(\tilde{l}_t(\alpha) - ES_{\alpha,t})^2$ ist die Varianz der Flügelverteilung. Gegeben eine Beobachtung \tilde{l}_t im Flügel, stellt die in **► Gleichung 08** definierte Statistik BT'_t einerseits vergleichbar BT_t ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtung in der Flügelverteilung dar. Andererseits vergleicht sie direkt den Score der Beobachtung mit dem erwarteten Score bei korrekter Schätzung. Für die praktische Durchführung gelten die Ausführungen von Righi/Ceretta [Righi/Ceretta 2013] entsprechend.

Da die Herleitung der Statistik BT'_t lediglich der Abrundung der Diskussion der Rolle der Elizitierbarkeit dient, erfolgt keine quantitative Analyse anhand des illustrativen Anleiheportfolios. □

Fazit und regulatorischer Ausblick

Der Expected Shortfall verschließt sich nicht grundsätzlich dem Backtesting. Wie dargestellt, kann das theoretische Argument der fehlenden Elizitierbarkeit entkräftet werden, und es existieren bereits einige vielversprechende Vorschläge für Backtesting-Verfahren. Insbesondere können, wie aufgezeigt, die ausreißerbasierten Value-at-Risk-Statistiken über Gauß-Quadraturfor-

men auf ein solides theoretisches Fundament gesetzt werden.

Die Entwicklung der aufsichtsrechtlichen Ausgestaltung des Expected-Shortfall-Regimes in der künftigen Eigenmittelunterlegung für das Handelsbuch ist noch nicht abgeschlossen [BCBS 2012, 2013, 2014, 2015]. In Bezug auf das Backtesting basiert im aktuellen Vorschlag die sogenannte Basel-Ampel, und somit die Herleitung des Skalierungsfaktors für das regulatorische Kapital, weiterhin auf dem 99-Prozent-Quantil des Value at Risk. Jedoch zeigt sich in der Vorgabe für die Zulassung von Handelstischen zum internen Modell, die auf dem Zählen von Ausreißern auf zwei Quantilen (97,5 Prozent und 99 Prozent) beruht, dass die Betrachtung mehrerer Quantile weiterhin Bestandteil der Diskussion ist. Über diese regulatorische Eigenmittelunterlegung hinaus ist abzuwarten, inwieweit sich der Expected Shortfalls in der internen Risikosteuerung und im Rahmen der Risikotragfähigkeit durchsetzen wird.

Eine frühzeitige und fundierte Beschäftigung mit dem Backtesting des Expected Shortfalls und im weiteren Rahmen der zukünftigen Ausgestaltung der Risikomodelvalidierung ist in jedem Fall anzuraten.

Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) [1996]: Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements, Januar 1996.

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) [2011]: Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book, Januar 2011.

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) [2012]: Fundamental review the trading book, Mai 2012.

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) [2013]: Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework, Oktober 2013.

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) [2014]: Fundamental review of the trading book: outstanding issues, Dezember 2014.

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) [2015]: Instructions for Basel III monitoring (Annex 4), Februar 2015.

Constanzino, N./Curran, M. [2014]: Backtesting general spectral risk measures with application to expected shortfall. Available at SSRN 2514403.

Keese, A./Quell, P. [2012]: Auf dem Weg zu neuen Eigenkapitalregeln für das Handelsbuch, RISIKO MANAGER Nr. 17, S. 29-33.

Baule, R./Tallau, C. [2012]: Neue Wege in der regulatorischen Messung des Marktrisikos: Expected Shortfall statt Value-at-Risk, RISIKO MANAGER Nr. 24, S. 6-11.

Ziggel, D. / Berens T. [2014]: Risikomessung mit dem Expected Shortfall, *RISIKO MANAGER* Nr. 1, S. 27 - 30.

Acerbi, C. / Székely, B. [2014]: Back-testing expected shortfall, *Risk*, Dezember 2014.

Homescu, C. [2014]: Robust and Practical Estimation for Measures of Tail Risk. Available at SSRN 2444381, abgerufen 28.12.2014.

Kerkhof, J. / Melenberg, B. [2004]: Backtesting for Risk-Based Regulatory Capital, *Journal of Banking & Finance* 8/28, S. 1845-1865.

Carver, L. [2014]: Back-testing expected shortfall: mission possible?, *Risk*, Oktober 2014.

Artzner, P. / Delbaen, F. / Eber, J.-M. / Heath, D. [1999]: Coherent measures of risk, *Mathematical Finance* 9, S. 203.

Acerbi, C. [2002]: Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion, *Journal of Banking & Finance* 26, S. 1505.

Tasche, D. [2002]: Expected shortfall and beyond, *Journal of Banking & Finance* 26, S. 1519.

Gneiting, T. [2011]: Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106 (494), S. 746-762.

Jorion, P. [2003]: *Financial Risk Manager Handbook*, 2. Auflage, John Wiley, New Jersey.

Bellini, F. / Bignozzi, V. [2013]: Elicitable risk measures. Available at SSRN 2334746, abgerufen 29.12.2014.

Ziegel, J. F. [2013]: Coherence and elicibility. arXiv preprint arXiv:1303.1690, abgerufen 28.12.2014.

Carver L. [2013]: Mooted VAR substitute cannot be back-tested, *says top quant*, *Risk*, März 2013.

Hull J. / White, A. [2014]: Hull and White on the pros and cons of expected shortfall, *Risk*, Oktober 2014.

Campbell, S. D. [2005]: A review of backtesting and back-testing procedures, *Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs*, Federal Reserve Board.

Emmer, S. / Kratz, M. / Tasche, D. [2013]: What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures, Available at arXiv:1312.1645 [q-fin.RM], abgerufen 28.12.2014.

Righi, M. B. / Ceretta, P. S. [2013]: Individual and flexible expected shortfall backtesting, *Journal of Risk Model Validation*, 7(3), S. 3.

Wong, W. K. [2008]: Backtesting trading risk of commercial banks using expected shortfall, *Journal of Banking & Finance*, 32, S.1404.

McNeil, A. J. / Frey, R. / Embrechts, P. [2005]: *Quantitative Risk Management*, 1. Auflage, Princeton University Press, New Jersey.

Berkowitz J. [2001]: Testing density forecasts, applications to risk management, *Journal of Business & Economic Statistics* 19, S. 465.

Autoren:

Dr. Hans Peter Wächter, FRM, CFA, Manager, d-fine GmbH, Frankfurt am Main.

Dr. André Miemiec, Manager, d-fine GmbH, Frankfurt am Main.

Nadja Schuster, MBA, Senior Manager, d-fine GmbH, Frankfurt am Main.

Anzeige

die bank

Intensivseminar:

Investorenschutz unter MiFID II – Mehr Aufwand für mehr Vertrauen?

Dienstag, den 5. Mai 2015 von 10:00 bis 17:00 Uhr
in Köln.

Weitere Informationen und Anmeldung:

Stefan Lödorf: 0221/5490-133 | events@bank-verlag.de



www.die-bank-trainings.de